Национальная Академия Наук Украины

Институт Прикладной Математики и Механики

НЕЛИНЕЙНЫЕ
ГРАНИЧНЫЕ
ЗАДАЧИ

Межведомственный сборник научных трудов
Основан в 1986 г.
Выпуск 6

Донецк 1995

УДК 517.9

СОЛИТОННЫЕ АСИМПТОТИКИ НЕУБЫВАЮЩИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

©А. И. Андерс, В. П. Котляров, Е. Я. Хруслов

Применение метода обратной задачи рассеяния к решению нелинейных эволюционных уравнений позволило не только найти ряд важных частных решений (как то многосолитонных, конечно-зонных), но и изучить асимптотическое поведение при больших временах некоторых общих решений таких уравнений. Одним из первых замечательных результатов, полученных этим методом было доказательство того, что решение задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ с быстроубывающими начальными данными с течением времени распадается на конечное число уединенных волн - солитонов. При этом было установлено, что присутствие последних в асимптотике определяется дискретным спектром оператора Шредингера, т.е. L - оператора из соответствующей $L - A$ пары Лакса [1]. Заметим, что конструкция решения задачи Коши, основанная на методе обратной задачи рассеяния, позволяет надеяться, что этот факт верен и для других нелинейных уравнений, входящих в известный список вполне интегрируемых уравнений. Однако, авторам пока неизвестны публикации, содержащие строгое доказательство этой «устной» теоремы.

После работы А.В.Гуревича и Л.П.Питаевского [2], в которой методом Уизема было построено приближенное неубывающее при $x \to -\infty$ решение уравнения Кортевега-де Фриза, моделирующее эволюцию начальной ступенчатой функции $\varphi_0(x) = c^2(\chi(x) - 1)$, где $\chi(x)$ - функция Хевисайда, возникла гипотеза о том, что и неубывающие решения специальных классов с течением времени должны распадаться на солитоны, точнее, бесконечный ряд солитонов. Эта гипотеза подтверждалась вычислительными экспериментами и отвечала физическим представлениям о рождении устойчивых образований-солитонов, если для них есть свободное «жизненное» пространство, как, например, положительная полуось в случае ступенчатой функции. Однако, она противоречила сформировавшемуся благодаря методу обратной задачи рассеяния представлению о взаимном соответствии солитонов и дискретного спектра L - оператора, поскольку оператор Шредингера со ступенчатой функцией $\varphi_0(x)$ в качестве потенциала не имеет дискретного спектра. Это кажущееся противоречие было снято в работе [3], в которой методом обратной задачи указанным методом изучить распад на бесконечный ряд солитонов некоторых решений, ведущих себя при $x \to -\infty$ более сложными образом, но порождающих спектр требуемой структуры. Этот подход может быть применен к неодномерным по пространственным переменным уравнениям Кадомцева-Петвиашвили (КП 1 и КП 2)

$$\frac{d}{dx}(u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x) = \sigma\frac{3}{4}u_{yy}, \tag{2}$$

где $\sigma = 1$ для КП 1 и $\sigma = -1$ для КП 2.

Реализацией метода обратной задачи рассеяния здесь является схема Заха-рова-Шабата [4], согласно которой решения уравнений (2) представляются в виде

$$u(x, y, t) = 2\partial/\partial x K(x, x, t, y),$$

где функция $K(x, z, y, t)$ является решением соответствующего уравнения В.А.Марченко

$$K(x, z, y, t) + F(x, z, y, t) + \int_x^\infty K(x, s, y, t)F(s, z, y, t)ds, \ z > x. \tag{3}$$

Ядро $F(x, z, y, t)$ этого уравнения должно удовлетворять следующей системе уравнений:

$$F_t + F_{xxx} + F_{zzz} = 0,$$

$$\sqrt{-\sigma}F_y + F_{xx} - F_{zz} = 0,$$

условие совместимости которой обеспечивает выполнение уравнений Кадомцева- Петвиашвили. Эта система уравнений имеет решения:

$$F_+(x, z, y, t) = \iint_{D_+} \exp[ip(x - z) - q(x + z) + 4pqy - 2q(3p^2 - q^2)t]d\mu_+ \ \text{КП 1},$$

$$F_-(x, z, y, t) = \iint_{D_-} \exp[-px - qz + (q^2 - p^2)y + (p^3 + q^3)t]d\mu_- \ \text{КП 2}, \tag{4}$$

где $\mu_\pm$-произвольная конечная мера с компактным носителем в плоскости (p, q). Имея в виду получить стремящиеся к 0 при $x \to \infty$ решения $u(x, y, t)$ уравнений КП, будем предполагать, что носитель меры $\mu_\pm$ расположен в верхней полуплоскости $q > 0$ в случае уравнения КП 1 и в правом верхнем квадранте $p > 0, q > 0$ в случае уравнения КП 2. Заметим, что ядро F_+ порождает антисимметрический оператор в $L_2[x, \infty)$ и, следовательно, уравнение (3) разре-шимо при любых x, y, t, и, тем самым, всюду определено некоторое решение уравнения КП 1. В случае уравнения КП 2 вопрос о разрешимости уравнения (3) в общем случае остается открытым. Однако, ниже мы выберем меру таким образом, что при больших $x(x > Ct - \frac{1}{2a}\ln t^{N+1}, t \to \infty)$ и $|y| \geq Mt$, уравнение (3) однозначно разрешимо, а значит, уравнение КП 2 в области вида

$$G_N = \{x, y, t : x > Ct - \frac{1}{2a}\ln t^{N+1}, \ |y| \geq Mt, \ t > T(N, M)\}$$

имеет решение $u_-(x, y, t)$. Асимптотику этих решений мы и хотим описать. Положим

$$f_+(\lambda, y) = q^2 - 3p^2 + 2pY \ \text{в случае КП 1},$$

$$f_-(\lambda, y) = q^2 - pq + p^2 + (q - p)Y \ \text{в случае КП 2},$$

где $\lambda = (p + iq) \in C, Y = y/t$.

Предположим, что носитель $D_\pm$ меры $\mu_\pm$ в (4) удовлетворяет условиям, аналогичным условиям (1): максимальное значение функции $f_\pm(\lambda, Y)$ на $D_\pm$ положительно и достигается в одной точке $\lambda(Y) \in D_\pm$ для почти всех $Y(|Y| < M < \infty)$

$$C_\pm(Y) = \max_{\lambda \in D_\pm} f_\pm(\lambda, Y). \tag{5}$$

Будем предполагать, что $d\mu_\pm = g_\pm(p,q)dpdq$, где $g_\pm(p,q)$-гладкая функция на носителе $D_\pm$, ограниченном кусочно гладкой кривой.

Теорема . *При выполнении этих условий существуют решения $u_\pm(x,y,t)$ уравнений КП, которые в области*

$$G_N^\pm = \{x, y, t : x > C_\pm(Y) - \frac{1}{2a_\pm(Y)} \ln t^{N+1},\ |y| \geq Mt,\ t > T(N,M)\}$$

представимы в виде

$$u_\pm(x,y,t) = \sum_{n=1}^{[(N+1)/2]} v_n(x,y,t) + O(t^{-1/2+\varepsilon}),$$

(6)

$$v_n(x,y,t) = \frac{2a_\pm^2(Y)}{2ch^2[a_\pm(Y)(x - C_\pm(Y)t + \frac{1}{2a_\pm(Y)}\ln t^{\gamma_n^\pm(Y)} - \frac{1}{2a_\pm(Y)}\ln \alpha_n^\pm(Y))]},$$

где $\alpha_+(Y) = q(Y)$, $\alpha_-(Y) = (p(Y) + q(Y))/2$, а функции $\alpha_n^\pm(Y)$ и $\gamma_n^\pm(Y)$ определяются поведением функций $g_\pm(p,q)$ в окрестности точки $\lambda(Y) = p(Y) + iq(Y)$. При этом асимптотика справедлива всюду вне точек разрыва функций $\alpha_\pm(Y)$, $\alpha_n^\pm(Y)$, $\gamma_n^\pm(Y)$.

Приведем два конкретных примера. Рассмотрим сначала уравнение КП 1. Пусть

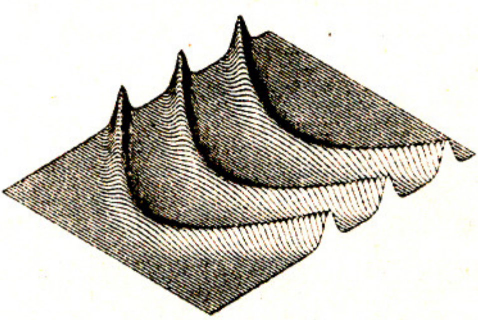
$$D_+ = \{(p,q) : q^2 - 2p^2 - b^2 \leq 0,\ q > |p|\sqrt{3},\ b > 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае условие (5) выполняется, причем

$$p(Y) = Y,\ q(Y) = \sqrt{b^2 + 2Y^2},$$

$$C_+(Y) = Y^2 + b^2$$

$$|Y| \leq M < b,\ \gamma_n(Y) = \begin{cases} n, & Y \neq 0; \\ 2n+1, & Y = 0. \end{cases}$$



Все функции $\alpha_n^+(Y) > 0$ и зависят от μ_+. Таким образом, в области $\{x > C_+(Y)t - \frac{1}{2a_+(Y)} \ln t^{N+1},\ |Y| \le M,\ t > T(N, M)\}$ решение уравнения КП 1 распадается в бесконечный цуг (ряд) солитонов (рис. 1).

Рассмотрим теперь уравнение КП 2. Предположим, что

$$D_- = \{(p,q)\ :\ (p+q)^2 + 4(p-q)^2 - b^2 \le 0,\ q > 0,\ p > 0,\ b > 0\}.$$

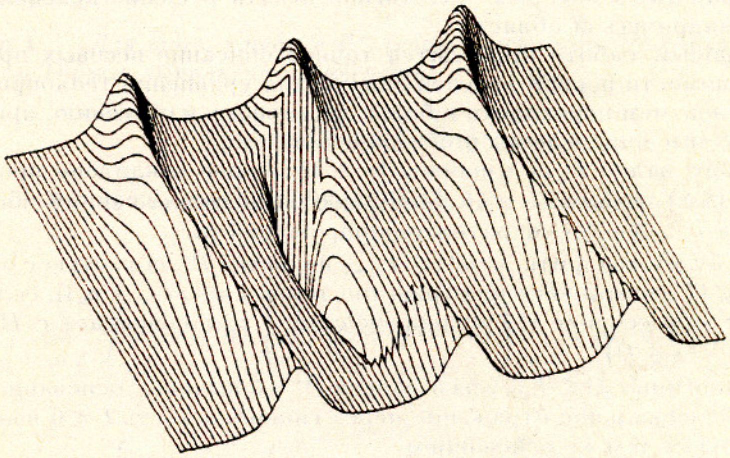
Тогда условие (5) выполняется и

$$p(Y) = \sqrt{b^2/4 - 4Y^2} - Y,\ \ q(Y) = \sqrt{b^2/4 - 4Y^2} + Y,$$

$$C_-(Y) = b^2/4 + Y^2,\ \ |Y| \le M < b/\sqrt{5},$$

$$\gamma_n(Y) = \begin{cases} n + 1/2, & Y \ne \pm b/2\sqrt{5}; \\ 3n + 3/2, & Y = \pm b/2\sqrt{5},\ \text{n-нечетное}; \\ 3n + 1/2, & Y = \pm b/2\sqrt{5},\ \text{n-четное}. \end{cases}$$

Функции $\alpha_n^-(Y)$ зависят от μ_-, причем, если n-нечетное, то $\alpha_n^-(Y) > 0$; если n-четное, то $\alpha_n^-(Y) > 0$ при $|Y| > b/2\sqrt{5}$ и $\alpha_n^-(Y) < 0$ при $|Y| < b/2\sqrt{5}$. Следовательно, в области $|Y| < b/2\sqrt{5}$ четные солитоны сингулярны (рис. 2).



1. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* , Теория солитонов: метод обратной задачи.–М. : Наука, 1980. – 319 с.
2. *Гуревич А.В., Питаевский Л.П.* , Распад начального разрыва в уравнении Кортевега - де Фриза.// Письма в ЖЭТФ. – 1973. – **17**, *N 5*. – С. 268–271.
3. *Хруслов Е.Я.* , Асимптотика решения задачи Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа ступеньки // Мат. сб. – 1976. – **99**, *N 2*. – С. 261–281.
4. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* , Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния *I* // Функ. анализ. – 1974. – **8**, *N 3*. – С. 43–53. ,

Математическое отделение
Физико-технического института
низких температур НАН Украины